

Indice

Prefazione	pag.	VII
Introduzione	»	1
1 Che cosa vuol dire risolvere un gioco	»	3
2 Giochi: le basi teoriche per studiarli	»	15
3 Giochi e paradossi	»	24
4 Giochi: qualche formalizzazione, comunque sempre da bar	»	34
5 Giochi: un diverso approccio	»	52
6 J. F. Nash jr	»	66
7 Matematica, sport, talento	»	75
8 Watzlawick e l'implicazione matematica	»	83
9 Logica? Una, nessuna, centomila	»	93
10 Kurt Gödel	»	108
11 Solo cinque teoremi	»	118

12 Alan M. Turing	pag.	127
13 La gelosia e la macchina che fa le somme	»	140
14 Omaggio a Genova	»	147
15 Omaggio a Mantova	»	153

Che cosa vuol dire risolvere un gioco

Che cosa rappresenta un gioco per un matematico? E soprattutto, che cosa significa studiare un gioco e cercare di risolverlo? La nozione di equilibrio di un gioco non è semplice, e va adattata a seconda del tipo di giochi considerati.

◇ Gioco è un termine semplice per descrivere un concetto complicato: però posso capirlo. È un modello matematico (cioè puramente astratto) che descrive un'interazione tra più di un soggetto: tutti riconoscono alcune regole che gestiscono l'interazione dall'inizio alla fine (anzi, come tutti i modelli astratti che si rispettano, gettano spesso via l'interazione intermedia e saltano subito alla fine). E poi ci sono le strategie e i risultati. Ma il termine che non capisco è «equilibrio». Uno si immagina che equilibrio voglia dire che tutti sono d'accordo, invece molto spesso non è così. Ci sono equilibri equilibrati ed equilibri totalmente squilibrati... Spero che ci sia una spiegazione almeno storica per l'etimologia del termine equilibrio.

▼ Sei partito in quarta! Vediamo di fare un passo indietro, per arrivare poi all'idea di equilibrio. Tutta la vita si esprime in termini di *relazioni*: la teoria dei giochi pretende di essere «l'approccio matematico» a questo aspetto. La cosa interessante davvero è che agli inizi la teoria è stata inventata per gli umani, anche se Nash, in una delle sue sublimi intuizioni, accenna al fatto che potrebbe essere applicata agli animali. E oggi ne trovi applicazioni davvero impensate, dalla genetica ai computer, tutti intesi come «esseri razionali interagenti».

◇ Stupefacente! E temo che tu mi stia prendendo in giro...

▼ Certo che no. Se ci pensi un attimo, l'idea di razionalità corrisponde al fatto che un organismo, qualunque esso sia, si comporti in maniera efficiente. Da questo punto di vista, ammetti che diventa molto meno paradossale ipotizzare che i batteri, tanto per fare un esempio, si comportino in maniera razionale. Da qui ai computer il passo non è poi così drammatico.

◇ Forse posso essere disposto a crederti, ma se mi facessi un esempio...

▼ D'accordo, e anche se non mi sento particolarmente originale, comincio dal dilemma del prigioniero, l'esempio più famoso di tutta la teoria.

◇ Non mi aspettavo altro!

▼ La storiella racconta che un giudice convoca due arrestati con il sospetto di aver commesso un crimine e fa loro il seguente ragionamento:

So che avete commesso la rapina di cui siete accusati. Tuttavia, se nessuno dei due confessa, non vi porto in tribunale perché le prove che ho non sono sufficienti per condannarvi. Quindi vi do un anno di galera, per un altro motivo che trovo di sicuro. Se uno dei due mi firma una dichiarazione di colpevolezza di entrambi, e l'altro no, condanno chi non confessa a sette anni di galera, mentre il pentito sarà libero. Se entrambi confessate, vi do i cinque anni previsti dalla legge.

Per tua comodità, ti rappresento la situazione in una tabella (chiamata bimatrice), che se hai una penna decente potrei scriverti sul tovagliolo.

◇ No, aspetta! Scrivo io un diagramma come me lo immagino perché bimatrice è un nome che mi fa paura.

	Aldo non firma	Aldo firma
Bruno non firma	1, 1	0, 7
Bruno firma	7, 0	5, 5

Ciascuno dei due arrestati ha soltanto due possibilità, il risultato prodotto da ognuna di queste dipende pesantemente dalla scelta dell'altro. E uno non sa che cosa fa l'altro. Storiella suggestiva, ma perché è così famosa?

▼ Di solito si usano Alice e Bob, ma va bene anche Aldo e Bruno. Comunque, mi chiedi perché è così famoso? I matematici, come sai, sono geni. O, per meglio dire, la matematica è geniale! La forza della matematica sta proprio nel fatto che usa un modello, un bel modello, per spiegare un sacco di situazioni apparentemente lontanissime... nel nostro dipartimento,

dove sono sviluppate forti competenze in fluidodinamica, ci si occupa di barche, costumi, inquinamento di lagune, giacimenti petroliferi, circolazione sanguigna, aneurismi: ovviamente tutte cose molto diverse, ma con una radice comune.

◇ Che cosa c'entra l'inquinamento con il dilemma del prigioniero?

▼ Niente, almeno per me, ma non mi lasci finire... stavo dicendo che il dilemma del prigioniero è un'esemplificazione, assolutamente geniale, di un fatto che accompagna la vita degli esseri viventi praticamente in ogni momento: il dilemma tra una scelta che individualmente è la più conveniente ma che, combinata con le scelte degli altri, provoca un risultato disastroso per tutti.

◇ Ti interrompo! Avevo letto e capito il problema, ora le tue spiegazioni mi hanno del tutto confuso...

▼ Hai ragione, mi spiego meglio. Ai due la scelta più conveniente è *comunque* di confessare, *qualunque* scelta faccia l'altro. Ma confessando entrambi si fanno cinque anni di galera, se tenessero entrambi la bocca chiusa se ne farebbero solo uno. Il che significa che la scelta ottimale di ogni giocatore *non* dipende dalle scelte dell'altro. Caso raro, come ti puoi immaginare. Eppure, anche in questa situazione semplice, guarda che viene fuori!

◇ Ora va meglio. Ma non ho ancora chiaro perché, in che modo e cosa, gli animali confessano.

▼ Io non ti rispondo, ma ti invito, se vuoi davvero saperne di più, ad andare su Internet e cercare esempi di dilemma applicato agli animali. Per darti un aiuto, ti dico «spinarello». O anche «pipistrello vampiro». Se invece preferisci pensare agli umani, con un po' di fantasia ti accorgi che ogni giorno giochiamo il dilemma del prigioniero, perché scelte che sappiamo essere efficienti collettivamente cozzano poi con il tuo interesse particolare: altrimenti, per esempio, non esisterebbero evasori fiscali, faresti meno code in autostrada, le prigioni sarebbero vuote...

◇ Ma è bellissimo, ora capisco che cosa volevi dire: il dilemma del prigioniero riduce in termini essenziali il problema costante e continuo di quello che si dice «tenere un comportamento socialmente accettabile». Ma torniamo all'idea di equilibrio?

▼ D'accordo. Ti dico come la vedo io, ma non credo che lo direi a lezione, o davanti a un collega...

◇ Io che cosa sono?

▼ Né tantomeno lo scriverei. Bisogna partire dalla domanda: che cosa significa comportamento razionale? La cosa è abbastanza chiara quando devo decidere da solo. Il primo passo consiste nell'ordinare, secondo le mie preferenze e in maniera coerente, le alternative che ho davanti, per poi scegliere la migliore.

◇ Piano, piano, che cosa significa «in maniera coerente»? Per esempio, che preferisco, come diceva Catalano, una moglie ricca, bella e intelligente a una brutta, povera e stupida?

▼ Proprio per niente! I matematici sono tolleranti, da questo punto di vista, ti lasciano definire in assoluta libertà le qualità rilevanti di una moglie o un marito. Però poi da te pretendono coerenza, nel senso che non devi contraddirti: se mi dici che preferisci guardare un film piuttosto che una partita, e uscire di casa piuttosto che guardare un film, non puoi poi pretendere che io creda che tu preferisca vedere la partita piuttosto che uscire di casa...

◇ Insomma, non puoi dire che le preferenze devono soddisfare la proprietà transitiva?

▼ Hai ragione, è proprio così, però che pesantezza formale! Dunque, abbiamo fatto un primo passo, anzi in realtà due. Infatti assumiamo: uno, che una persona sappia ordinare le varie alternative (cosa che non è sempre vera, pensa come spesso uno si tortura per decidere che auto preferisce...), due, che le sue preferenze siano coerenti. Questo rappresenta, secondo me, il primo livello di razionalità ipotizzato dalla teoria. A questo punto, se sono solo a decidere, il passo successivo, dal punto di vista matematico, è assolutamente banale: il comportamento razionale prescrive che tu scelga l'alternativa a te più favorevole, secondo le tue preferenze: questo lo chiamo «equilibrio».

◇ Finalmente, ci hai messo mezz'ora ad arrivare a quello che ti ho chiesto! Allora, che cosa è un equilibrio nella teoria dei giochi? Sembra essere *l'insieme dei comportamenti razionali* dei giocatori.

▼ Se ci ho messo mezz'ora è perché le cose non sono affatto così semplici. Non farti ingannare dal dilemma del prigioniero dove, seppure quasi paradossale, la soluzione emerge in maniera molto semplice. In realtà, la presenza di più individui interagenti rende il problema un guazzabuglio micidiale... e qui si scatena la teoria. In un certo senso, il problema sta nel fatto che la mia razionalità, se posso esprimermi così, non dipende solo dal mio comportamento, ma anche da quello degli altri. Parlando per paradossi, la teoria dei giochi, almeno nei suoi aspetti storici, può essere raccontata, come in effetti faccio a lezione, come una *definizione* dell'idea di razionalità.

◇ Forse ho bisogno di qualche esempio, sia pure a livello elementare, di razionalità in ambiente interattivo, altrimenti mi perdo.

▼ Un primo paradigma di razionalità te l'ho già fatto vedere, e devi ammettere con me che è scioccante. Razionale è preferire l'alternativa A alla B, se con A otteniamo di più che con B, *qualunque cosa facciano gli altri*. Si dice che B è dominata da A, e razionalità impone che non si usi una strategia dominata. Nel dilemma, non confessare è strategia dominata. Con i risultati che vedi...

◇ Allora fammi un esempio più convincente...

▼ Te ne faccio due, per farti vedere come possa essere messo in evidenza il comportamento razionale. Il primo è talmente semplice che magari ti offendi. Eccolo. Ci sono due mazzetti di carte, uno ne contiene tre l'altro due. Se ne possono togliere quanti se ne vuole da un mazzetto, o lo stesso numero da entrambi. Che pulisce il tavolo vince. Chi vuoi essere, il primo o il secondo a tirare? Ti lascio un minuto per rispondere.

◇ Voglio essere il primo!

▼ Bravo, ti piace vincere. Infatti, togli due carte dal mazzetto che ne ha tre, vero?

◇ Proprio così, e ti lascio con un mazzetto che ha due carte e l'altro che ne ha una. Adesso tocca a te.

▼ Siamo d'accordo, mi ritiro, ma sono contento lo stesso, perché hai intuito che cosa sia l'equilibrio in questo caso: l'unico esito possibile del gioco tra due persone che ci mettono un po' di testa...

◇ Che straordinaria definizione matematica! E l'altro esempio?

▼ Eccolo, guarda questa tabella. Dobbiamo scegliere contemporaneamente: io una riga, tu una colonna. All'incrocio delle nostre scelte, il numero dice quanto tu mi pagherai. Sapresti dirmi che succede?

6	-2	7
4	3	9
9	0	-12

◇ A prima vista direi che non mi proponi un gioco equo: hai messo qualche numero negativo, il che significa che in qualche caso saresti tu a pagare me, ma l'impressione è che sarò io a pagare te...

▼ Giusto, ma quanto?

◇ A occhio non saprei... sarà la birra.

▼ Non ti preoccupare, non è la birra. E non arrabbiarti quando ti faccio vedere la soluzione. In teoria dei giochi succede spesso che non vedi una cosa, ma quando poi te la dicono risulta ovvia! Allora, ecco un suggerimento. Se io giocassi la prima riga, che faresti tu?

◇ Gioco la seconda colonna, così tu mi paghi 2.

▼ Esatto, così come otterrei 3 dalla seconda riga e dovrei pagare a te 12 se giocassi la terza (e tu lo sapessi). Dunque, vedo bene che sono in grado di ottenere almeno tre, giocando la seconda riga.

◇ Aspetta un secondo, credo di aver capito: intanto mi disegno la matrice come una bimatrice fatta come il dilemma del prigioniero, che ci capisco meglio.

	scelta col. 1	scelta col. 2	scelta col. 3
scelta riga 1	-6 6	2 -2	-7 7
scelta riga 2	-4 4	-3 3	-9 9
scelta riga 3	-9 9	0 0	12 -12

Ora faccio il tuo stesso ragionamento, ma con i segni invertiti: se gioco la prima colonna rischio di pagare 9, se la seconda 3, se la terza di nuovo 9, quindi giocherei la seconda...

▼ Perfetto, ti accorgi che hai trovato la soluzione del gioco? Supponiamo che ci sia una persona che ci propone una transazione tra noi, a patto che non giochiamo: io accetto solo se mi viene dato non meno di 3, tu rifiuti di pagare una cifra non inferiore a 3: sembra uno scioglilingua, invece è evidente che anche senza la presenza di qualcuno che ci guidi ci accorderemo sul fatto che tu mi darai 3, che è evidentemente il risultato del gioco. Altrettanto importante è specificare come si ottiene, perché si tratta di specificare le strategie di equilibrio, che in questo caso si chiamano di *maxmin* per me, di *minmax* per te.

◇ Va bene, ora le cose cominciano a chiarirsi, si tratta di trovare la maniera giusta di analizzare il gioco, e fatto questo si formalizza l'idea di soluzione, e tutto è concluso. L'equilibrio di un gioco è il risultato dei comportamenti dei soggetti egoisticamente razionali, cioè è la composizione degli equilibri (interiori) dei vari giocatori. Però scusa, così il divertimento è abolito: mi hai fatto un po' di esempi, e la conclusione è che giocare è inutile, perché il risultato del gioco è predeterminato – a patto che i giocatori non siano degli inetti – per di più ho l'impressione che il matematico qui stia dando il meglio e il peggio di sé: soluzioni chiare,

eleganti, inutili. Perché ammetterai che nella vita di tutti i giorni anche le persone razionali non sanno che pesci pigliare, e amano giocare, perché non è così scontato chi vince.

▼ Aspetta un momento. Prima di tutto, la teoria necessita sempre di ipotesi, e questo ovviamente ne limita l'applicabilità, ti pare? E poi gli esempi fatti sono semplici, da un certo punto di vista troppo semplici. La situazione si può complicare... ma prima di tutto due parole su quanto già visto. Nel gioco dei due mazzetti di carte il metodo per trovarne l'esito si chiama induzione a ritroso. Significa che tu ti disegni un grafo, con tutte le mosse possibili, e poi parti dalla fine per scoprire come va a finire. Ne ripareremo sicuramente, intanto però memorizza le caratteristiche fondamentali di questo gioco: prima di tutto i giocatori giocano in successione, non contemporaneamente, poi deve finire in un numero finito di mosse e in ogni istante i giocatori devono sapere che cosa è successo prima e le possibili evoluzioni: non devono, per esempio, esserci mosse non viste da un giocatore, oppure informazioni note a qualcuno e non note a qualcun altro.

◇ Chiaro, ora capisco che il primo gioco è di tipo particolare, e che questi giochi sono totalmente banali per persone razionali, quindi inutili da giocare. Puoi dirmi qualcosa di più interessante?

▼ Aspetta, corri sempre! Ecco un gioco famoso: vengo da te e ti dico che ho due quadri preziosi, e che te li do, a un patto, che tu faccia un'offerta a Renzo, gliene puoi offrire zero come uno o due. Se lui accetta allora tutto è a posto, ma se non accetta, come non detto, mi tengo tutto io. Che farai?

◇ Non sono sicuro di aver capito: Renzo sa che la sua scelta determina il mio risultato? Se lo sa, mi sembra che ci siano due situazioni, ognuna inaccettabile per uno dei giocatori: quella dove io non tengo nessun quadro e quella dove lui non riceve nessun quadro. Dato che comprendiamo entrambi che ciascuna di queste non è accettabile dall'altro, dobbiamo riconoscere che rimane solo una soluzione.

▼ Scusa ma i tuoi ragionamenti, anche se non del tutto infondati, non c'entrano granché con l'approccio matematico alla teoria dei giochi. Intanto, ovviamente Renzo sa che la sua decisione influenza il mio risultato, altrimenti non saremmo di fronte a un'interazione. Se invece applichi quanto visto prima, dovresti renderti conto che ci troviamo di fronte a due soluzioni possibili. Offri un quadro a Renzo, che accetta perché se rifiuta non ne ha neanche uno.

◇ Ma potrei anche offrirne zero. Lui potrebbe accettare, tanto ottiene zero sia che accetti sia che dica di no! Non possiamo ignorare tale possibilità.

▼ Proprio così. Osserva come la situazione sia differente dal caso in cui tu debba decidere da solo. Quando sei solo non ti torturi per scegliere una delle alternative ottimali: per definizione ti danno tutte la stessa soddi-

sfazione (massima). Qui è tutto diverso. Però scusa, mi rendo conto ora che ho lasciato cadere uno spunto importante che mi hai dato un attimo fa. Lo riprendo ora. Voglio rispondere alla tua considerazione che la teoria ci distrugge il divertimento di giocare, visto che prevede l'esito dei giochi. Intanto, lasciami dire che naturalmente questo accade solo in casi semplici; come vedremo, in altri casi la teoria pur dicendoti cose importanti, lascia spazio a una certa casualità. Ma il punto è un altro: è proprio lo scopo della teoria, di ogni teoria, studiare i fenomeni per prevederne le evoluzioni. Non scappa a questo compito la teoria dei giochi, ovviamente. C'è poi tutto il discorso, nel quale però non mi avventuro, relativo al fatto che la teoria è divertente in quanto ci fa vedere, spesso, come i nostri comportamenti si allontanino dalla razionalità. Da questo punto di vista, fissa un paradigma e poi noi vediamo quanto ci scostiamo da questo. In fondo, se ti invito a giocare al tris è per vedere se sei attento, o sveglio, o furbo.

◇ Mi hai abbastanza convinto, ma mentre parlavi mi è venuta in mente una cosa, che mi sembra rappresenti un problema molto più serio. Gli scacchi non sono un gioco della stessa natura di quello dei due mazzetti?

▼ Eh già!

◇ Quindi tu sostieni che due persone razionali non giocano a scacchi perché tanto il gioco finisce sempre alla stessa maniera..., è proprio questo che vuoi sostenere?

▼ Non voglio risponderti, se non che hai ragione, gli scacchi sono un gioco finito, a mosse successive, tutto sotto gli occhi dei giocatori.

◇ Allora è vero, tu sai giocare la partita perfetta.

▼ No, affatto, anche se mi onori a ritenermi esperto della teoria. Lasciamo perdere questo tema, troppo interessante e lungo per parlarne adesso. Magari il discorso verrà fuori quando parleremo di Gödel, ricordati che me lo hai promesso, anche se forse in quel caso invece che bere una birra potremmo mangiare una sachertorte...

◇ D'accordo, ma che mi dici allora dei giochi in cui, per esempio, avvengono mosse contemporanee, e quindi non posso fare il disegno come in quelli a mosse consecutive?

▼ Ne hai già visto un esempio, la matrice di sopra.

◇ Vuoi dire allora che calcolando i valori di minmax e maxmin risolvo anche tutti i giochi a mosse contemporanee?

▼ Aspetta un attimo, quello di prima è un gioco a somma zero. Cioè, o io pago te o tu paghi me. Non tutti i giochi sono così: per esempio, il dilemma del prigioniero non rientra in questa categoria. I più intriganti non sono a somma zero. Questi sono i più semplici, e hanno, ha detto qualcuno, la stessa funzione dei gas perfetti in Fisica. Un utile punto di partenza per costruire teorie più complesse.

Comunque, guarda un po' la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sai dirmi quale è l'esito di questo gioco?

◇ Vedo che si tratta di un gioco a somma zero a scelte contemporanee come quello di prima. Però che pasticcio! Mi sembra che il maxmin sia -1 , il minmax 1 , la matrice di prima era più semplice...

▼ Appunto, ecco il problema. Se i due valori non coincidono, l'esito del gioco non è scontato. Detto in parole povere, la differenza tra i due valori è qualcosa che i giocatori vorrebbero per sé, ma a chi andrà?

Nota che la matrice rappresenta la morra cinese, in cui il sasso vince sulla forbice, che vince sulla carta, che vince sul sasso... Scritta come bimatrice, come piace a te, viene così:

	sasso	forbici	carta
sasso	0	-1	1
forbici	1	0	-1
carta	-1	1	0

◇ Bene, posso tirare un sospiro di sollievo, mi avrebbe dato molto fastidio pensare che per qualcuno un tale gioco ha equilibrio..., come diresti tu, che sarebbe inutile giocarci.

▼ Hai sospirato troppo presto! Qualcuno, cui ti sarà difficile opporti, ha

dimostrato che anche quel gioco ha equilibrio. Si tratta di von Neumann, non proprio uno qualunque, ti pare?

◇ Basta, vado a casa, sono perfino disposto a pagare io, ma questa cosa va al di là di quello che posso accettare.

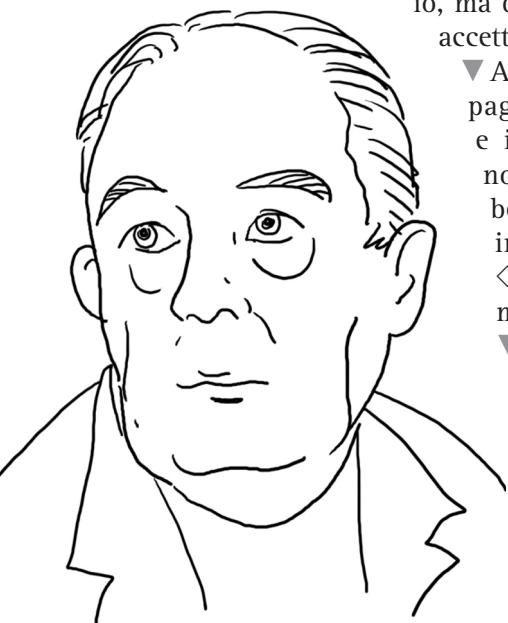
▼ Aspetta un secondo. Ovviamente ti lascio pagare, ma ascoltami ancora un attimo. Se tu e io giocassimo alla morra cinese, magari non una volta sola, non credi che ci saremmo modo più intelligenti, e modi meno intelligenti per farlo?

◇ Direi di sì. Se per esempio io non tirassi mai sasso...

▼ Io tirerei sempre forbici.

◇ E faresti bene: o vinci o pareggi, non perdi mai.

▼ Appunto. von Neumann, te la faccio breve, ha dimostrato un teorema, secondo me meraviglioso, che dimostra che anche questi giochi hanno equilibrio. In altre parole, esiste un modo ottimale per i giocatori di giocarlo, e l'esito di conseguenza è scontato, quel-



John von Neumann

lo stabilito dalle strategie di equilibrio, che sono ben definite. Attenzione però, qui il nome strategia indica qualcosa di diverso da prima. In questo teorema le strategie non sono tre, carta sasso e forbici, ma tutte le possibili distribuzioni di probabilità su queste tre possibili scelte. Per fare un esempio, una strategia è $(0, 1/2, 1/2)$, che significa non gioco mai carta, e gioco sasso e forbici con uguale probabilità. Di conseguenza le utilità si calcolano come valori attesi. Il teorema di von Neumann fa vedere che i valori di minmax e maxmin in questo mondo di strategie allargato, che chiamiamo delle *strategie miste*, coincidono sempre! Ne conosco una dimostrazione bellissima, posso fartela vedere?

◇ E allora chi vince allora alla morra cinese? Tu o io? Che stupido, lo so benissimo, non c'è bisogno che me lo dici, se c'è un esito, non può che essere il pareggio. Ma basta far vedere che il minmax e il maxmin esistono per affermare che il gioco ha equilibrio?

▼ Non che esistono: esistono sempre; ma che coincidono. Però sei intuitivo, doppiamente intuitivo. Intanto, non basta far vedere che i due valori coincidono. Ora il mondo non è più fatto da un numero finito di scelte, quindi si pone il problema dell'esistenza della strategia ottimale. D'altra parte ammetterai anche tu che siamo in condizioni ideali di compattez-

za... Poi è vero che le strategie ottimali congiunte nella morra cinese portano al pareggio. Questo ovviamente non succede su ogni singola partita, ma *in media* sì. Ora vincerne una e perderne un'altra è come pareggiarle tutte e due, ti pare?

◇ Esatto, anche se non funziona così nel campionato di calcio. E lascia perdere la compattezza, che non mi interessa proprio...

▼ Per forza, il campionato non è esattamente un gioco a somma zero.

◇ Bene, mi sembra di aver intuito un bel po' di cose. Anche se siamo ben lontani dall'aver esaminato tutte le tipologie di giochi possibili, l'idea che mi sono fatto è che un bravo esperto di teoria dei giochi propone un modello, scopre una definizione di equilibrio, o esito, e dimostra che quei giochi hanno equilibrio. I teoremi di Nash, di von Neumann, di Shapley, su vari tipi di equilibri sono un po' come il teorema di Ruffini: un polinomio reale di grado dispari ha sicuramente una soluzione. Ognuno di quei teoremi dichiara l'esistenza della soluzione a un problema che verifica alcune proprietà, spesso dichiarano anche l'unicità della soluzione. È giusto pensarli in questo modo?

▼ Direi di sì, per quel che riguarda l'esistenza. Per l'unicità, siamo in un mare di guai. Il teorema di Nash, che estende il teorema di von Neumann ai giochi non a somma zero, si basa su un teorema di punto fisso alla Brouwer, quindi, ahimè, nessuna speranza di unicità. Anzi, per stupirti un po', ti dirò che in genere nei giochi finiti gli equilibri di Nash sono in numero dispari, in genere maggiore di uno.

◇ Dimmi una cosa, visto che hai nominato Nash, la sua idea di equilibrio è un'estensione ovvia di quella di von Neumann?

▼ Se sei d'accordo con me che i premi Nobel più meritati sono alle idee ovvie che nessuno prima aveva visto, allora è proprio così. von Neumann stesso, dopo aver brillantemente risolto il caso a somma nulla, ha inventato la teoria cooperativa perché non ha intuito l'idea di Nash. Anzi, quando l'ha vista, ha commentato che si trattava di un ennesimo teorema di punto fisso, forse non sarebbe stato un buon referee...

◇ Mi sembra siamo arrivati a un punto interessante, per oggi si potrebbe chiudere qui. Ma mi pare che rimanga ancora qualche argomento di conversazione interessante.

▼ Certo, come minimo merita un'altra chiacchierata tutta l'ipotesi di parenza della teoria, e mi piacerebbe sentire la tua sul perché nel caso del dilemma del prigioniero vediamo persone che accettano quel che sembra un sacrificio per ottenere un risultato globalmente migliore per tutti...

◇ Sono d'accordo, è un tema appassionante, è una matematica che sconfina, si intreccia a molte altre questioni, che ci permette di uscire da un ghetto, magari dorato, ma che ci isola nel momento in cui un linguaggio complicato e inaccessibile ai più ci costringe a parlare solo tra noi. Invece par-

lare di queste questioni, sia pure partendo dalla matematica, ci permette di fare discorsi che toccano questioni davvero interessanti in senso universale. Però ne riparliamo sempre al bar, perché sono temi così filosofici che solo in un ambiente rilassato posso trovare il coraggio di esprimere le mie idee da dilettante.

▼ Certamente parleremo ancora di giochi. Perché mi accorgo ora che tu hai guidato la conversazione verso l'idea di equilibrio, ma ci sono tanti altri aspetti, alcuni magari preliminari, che andrebbero considerati. Comunque, lasciami riassumere dicendo che oggi abbiamo parlato di varie tipologie di giochi. Quelli in cui si fanno mosse una alla volta e visibili a tutti: almeno in teoria, sono ben descritti da un grafo. E quelli a mosse contemporanee che, almeno nel caso finito, si descrivono bene con semplici matrici o bimatrici, che per inciso tu devi complicare altrimenti non capisci. Tra questi, sono importanti quelli a somma zero, che rappresentano un caso particolare. Non abbiamo ancora nemmeno sfiorato l'idea di gioco cooperativo, che da un certo punto di vista è il preferito da molti esperti. Ne parleremo sicuramente.

◇ Anche se non siamo a lezione, apprezzo il mini riassunto. Mi pare quindi che questa conversazione al bar avrà dei seguiti, e l'idea non mi spiace!

▼ Nemmeno a me, quindi alla prossima.