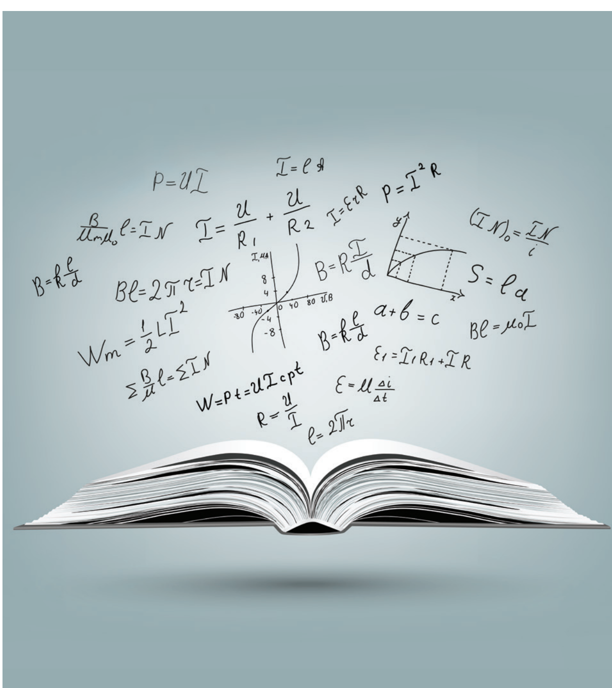
Eugenia Cheng

QUANTO È REALE LA MATEMATICA?

Come domande semplici conducono a verità profonde

scienza FA



FrancoAngeli

Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con **Adobe Acrobat Reader**

Adobe Acrobat Reader

Adobe
Adobe Digital Editions

La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile **con Adobe Digital Editions**.

Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta **cliccando qui** le nostre F.A.Q.

scienza FA

Una collana di saggi per il lettore non specialista:
per comprendere la realtà che ci circonda

Eugenia Cheng

QUANTO È REALE LA MATEMATICA?

Come domande semplici conducono a verità profonde

scienza **FA**

Traduzione di Luisa Doplicher

FrancoAngeli

Progetto grafco di copertina: Géraldine D'Alessandris

Titolo originale: *Is Maths Real?*
How Simple Questions Lead Us to
Mathematics' Deepest Truths
Profile Books Ltd,
29 Cloth Fair, London, EC1A 7JQ
United Kingdom

Traduzione dall'inglese: Luisa Doplicher

Isbn: 9788835166856

Dedico il libro a ogni persona che, studiando la matematica, per colpa altrui si è sentita stupida.

Non sei stato tu ad aver fallito con la matematica, ma la matematica ad aver fallito con te.

Indice

Introduzione

Quando ero bambina, una delle mie materie scolastiche preferite era quella in cui costruivamo peluche. Una volta creai un soffice barboncino e un cagnetto addormentato, con orecchie morbide e vellutate. Mi divertiva tutta la procedura: da quando si tagliavano i pezzi, vedendo che combaciavano miracolosamente per formare un animale, alla fase di cucito, fino al momento magico in cui si rovesciava l'oggetto dall'interno all'esterno, e lo si riempiva con l'imbottitura, in modo che sembrava prendere vita.

Perché fare un peluche, se è possibile comprarlo? Che bisogno c'è di fare una cosa con le proprie mani, dato che la si può ottenere già pronta?

A volte il motivo è che gli oggetti creati in prima persona sono migliori. Le torte casalinghe mi piacciono molto di più di quelle acquistate in un negozio. Ma non sempre ciò che facciamo noi è obiettivamente "migliore". Suono volentieri il pianoforte, anche se potrei ascoltare esecuzioni di gran lunga "migliori" mettendo su un disco o andando a un concerto. Ogni tanto mi diverto anche a farmi i vestiti da sola, benché vengano fuori un po' storti.

A volte il fai-da-te è più economico. Risparmio parecchi soldi se mi taglio i capelli da sola, anche se un'acconciatura professionale avrebbe un aspetto "migliore".

Spesso, tuttavia, fare le cose in prima persona è semplicemente fonte di soddisfazione. È ciò che provo io occupandomi di cucina, musica o vestiti, ma l'ambito può variare a seconda della persona.

A qualcuno piace arrampicarsi su una parete rocciosa a mani nude (no grazie), scalare l'Everest senza ossigeno (neanche questo è per me) o attraversare l'Atlantico su una barca a remi (un'altra cosa che lascerò perdere). Qualcun altro ama programmare escursioni in cui si trasporta tutto nello zaino, tenda e cibo inclusi, per trascorrere un po' di tempo nella natura selvaggia in completa autosufficienza.

Per me anche la matematica rappresenta un'opportunità per creare qualcosa in prima persona; ciò che creo con la matematica è la *verità*. Sperimento una completa autosufficienza nel mondo selvaggio delle idee. La trovo un'esperienza entusiasmante al massimo livello; un'esperienza che mette in soggezione, lascia a bocca aperta e, in ultima analisi, dà grandi soddisfazioni. In questo libro descriverò esattamente questa esperienza.

Vorrei trasmettere che cosa si prova a occuparsi di matematica, presentandola in maniera piuttosto diversa da come viene concepita di solito. Illustrerò il lato affabile della matematica, quello creativo, pieno di fantasia e di nuove esplorazioni; la parte in cui si sogna, si segue il proprio intuito, si ascolta l'istinto e si prova la gioia di capire, simile a quella di vedere i raggi solari quando la nebbia si dissipa.

Questo non è un manuale scolastico, né un testo di storia della matematica: è un libro di emozioni matematiche.

La matematica ispira emozioni diversissime a seconda della persona; ad alcune evoca soprattutto la paura e il ricordo di una materia che le faceva sentire stupide. Vorrei gettare sulla matematica una luce emotiva diversa.

C'è chi adora la matematica e c'è chi la odia; purtroppo i discorsi di alcune persone appassionate non fanno che rinfocolare il fastidio provato da altre. Va notato che la matematica è apprezzata per due motivi quasi opposti. A volte piace perché si crede che essa fornisca risposte nette, del tipo "giusto o sbagliato". Chi ha questa convinzione risolve i problemi matematici con facilità e si sente brillante. Altre persone detestano la matematica più o meno per lo stesso motivo, considerato però sotto una luce completamente diversa: la matematica fornisce sì risposte nette, del tipo "giusto o sbagliato", ma queste persone faticano a trovarle e di conseguenza si sentono stupide. O, più probabilmente, vengono fatte sentire stupide da chi risolve i problemi con facilità. In ogni caso, queste persone non apprezzano l'idea di risposte nette. Osservano che la vita è fatta di sfumature impercettibili e non credono che se ne possano ritrovare gli aspetti più interessanti in una struttura così "bianco o nero".

L'immagine di un mondo rigido con risposte nette è però solo un riflesso pallidissimo della matematica. Quella astratta in realtà non ha risposte così nette, del tipo "giusto o sbagliato", soprattutto alle frontiere della ricerca; sono tuttavia pochissime le persone che arrivano a quel livello e colgono la vera natura della disciplina. La cosa più incredibile è che, spesso, le persone esperte amano la matematica per lo stesso motivo per cui altre la detestano: apprezzano le sfumature e le sottigliezze che essa offre per indagare ed esprimere gli aspetti più interessanti della vita. Nella sua essenza, la matematica non è una disciplina di risposte nette ma di mondi via via più articolati, nei quali si può cercare di comprendere se varie cose sono vere.

Avviene quindi un effetto curioso: chi fa ricerca in matematica ha lo stesso atteggiamento di chi la detesta. L'unica differenza è che dai primi esso viene coltivato e approvato, mentre viene trattato con sdegno o addirittura sarcasmo dalle persone inesperte, che rischiano di non accorgersi mai quanto i loro pensieri e le loro sensazioni si avvicinino a quelli di chi è specialista.

C'è un divario tra la vera natura della matematica e la percezione che spesso se ne ha. Vorrei colmare questo abisso. Troppa gente si fa scoraggiare dalla matematica per i motivi sbagliati. Troppo spesso, davanti a domande di matematica che sembrano elementari ma sono in realtà importanti e profonde, la reazione è far sentire stupida la persona che le ha formulate. La persona ci tiene a quelle domande, ma si sente dire che sono stupide o fuori luogo, mentre in realtà sono interessantissime dal punto di vista matematico. Vorrei rispondere a quelle domande e, inoltre, sottolineare quanto è benvenuto e prezioso il desiderio di capire meglio, invece di dare la matematica per scontata. Tutto ciò è importante, perché lo scopo ultimo della matematica è proprio *non* dare nulla per scontato.

Non voglio fare prediche nella speranza di portare chiunque ad amare la matematica. Dato che ogni persona si sente motivata o scoraggiata da cose diverse, non c'è un sistema universale per rendere la matematica interessante. Vorrei solo gettare un po' di luce sulla sua vera natura, per eliminare alcuni falsi miti, fare piazza pulita dei malintesi e impedire che tutto ciò allontani certe persone dalla disciplina. Se la matematica non vi piace benché ne cogliate la vera natura, nessun problema: non c'è bisogno che tutti gli esseri umani apprezzino le stesse cose. Trovo semplicemente un peccato che molte persone si allontanino dalla matematica quando ne hanno potuta vedere solo una versione molto ristretta, autoritaria e priva di fantasia, che non lascia il minimo spazio a contributi e curiosità individuali.

Per me la sensazione di poter dare un contributo è importantissima. A volte, soprattutto dopo varie ore di lezione, mi sento troppo stanca per prepararmi la cena, anche se molte cose sono già pronte e basterebbe aprire un pacchetto di pasta e accendere i fornelli. Chissà perché, tuttavia, non sono mai troppo stanca per fare una torta. Ho capito che è tutta una questione di contributo personale. Mi succede di non avere energie per qualcosa che non sembra richiedere un contributo o creatività da parte mia, eppure trovo le forze per fare ciò che sembra più faticoso ma mi dà la sensazione di poter offrire un contributo personale e di poter usare la creatività; ho l'impressione che sia tempo ben speso.

Questo è proprio uno dei motivi per cui a volte la matematica sembra respingente. Chi ama dare un proprio contributo creativo non troverà interessante seguire alcune regole prestabilite per fare calcoli di routine; penserà che richiedano troppi sforzi. Magari preferirà creare un minuscolo servizio da tè da 12 pezzi con il pongo, come fece uno studente di arte in una lezione in cui avevo proposto un'attività matematica con quel materiale, dando il permesso di continuare a usarlo durante la discussione successiva.

Chi insegna matematica non sa bene come gestire i vari tipi di persone che immagina di trovare nelle classi. Da un lato si desidera che *alcune* imparino a svolgere ogni procedimento in maniera "corretta" e accurata, soprattutto se poi si occuperanno di ricerca o ne avranno bisogno sul lavoro, ma è chiaro che la maggioranza di chi assiste alle lezioni di matematica scolastica non farà niente del genere. Sarebbe eccessivo portare l'intera classe al livello richiesto da impieghi in cui si usa la matematica, come lo sarebbe insegnare ai bambini e alle bambine a cucinare come se dovessero ricoprire un ruolo specializzato nella cucina di un ristorante. È invece meglio (e sospetto che lo sia in entrambi i casi) mostrare le possibilità, coltivare la curiosità e il divertimento, confidando nel fatto che le competenze più specifiche saranno apprese in seguito, se ci sarà il desiderio e la necessità di farlo.

In genere a questo punto c'è chi si scandalizza: "Alcune capacità matematiche elementari sono essenziali nella vita quotidiana!". Immagino di sì, ma non credo che queste capacità siano così numerose, né tanto "essenziali". La maggior parte delle situazioni che le richiedono sono piuttosto artificiose. In ogni caso, insegniamo tantissime cose che non sono affatto essenziali; bisogna inoltre valutare quanto sia dannoso che la matematica diventi respingente per via di un'impostazione didattica limitante e priva di fantasia.

Fin troppo spesso la matematica sembra derivare da regole imposte rigidamente, e per questo fa paura. In verità, la matematica scaturisce dalla curiosità, dall'istintiva curiosità umana, dall'insoddisfazione creata dalle risposte ottenute e dal desiderio di voler capire sempre di più. La matematica nasce dalle domande.

Vi è mai capitato di voler chiedere qualcosa sulla matematica, sentendovi dire che è una domanda stupida? Anche le bambine e i bambini pongono molte domande ingenue, come per esempio: la matematica è reale? Da dove viene? Come sappiamo che è giusta? Sfortunatamente, domande di questo tipo vengono scoraggiate fin troppo spesso; si dice che sono "stupide". In realtà, però, in matematica non esistono domande stupide. Queste domande "stupide" sono le stesse che si pongono le persone esperte; sono al cuore della ricerca in matematica e fanno progredire la nostra comprensione della disciplina.

Potrebbe sembrare che la matematica consista nel risolvere problemi, *rispondendo* a domande, ma una delle sue parti più importanti è quella in cui si *pongono* domande. In questo libro mostrerò che a volte esse paiono domande da sprovveduti o vaghe, ingenue, semplici, confuse, ma possono spianare la strada ad ambiti di ricerca tra i più profondi che esistano. In queste domande si riflettono qualità raramente associate alla matematica: la creatività, l'immaginazione, la giocosità e il desiderio di violare le regole.

Bisognerebbe incoraggiare domande di questo tipo, non reprimerle.

Dando alla classe l'impressione che queste domande non vadano poste, si trasmetterà il messaggio che la matematica è rigida e autocratica e che non bisogna metterla in discussione. Questo è il *contra-*

rio della vera natura della matematica. Ecco il suo aspetto più essenziale: la matematica è stata costruita su fondamenti rigorosi proprio perché fosse possibile metterla in discussione in maniera profonda e perché resistesse a ogni sorta di interrogativi. In assenza di una risposta, il vero istinto matematico non è reprimere la domanda, ma indagare per essere in grado di rispondere.

Ecco perché le domande sfociano in matematica profonda.

Quando si inizia a fare ricerca, durante il dottorato, una delle cose più difficili è trovare un buon problema di cui occuparsi; spesso è uno dei compiti più importanti della persona esperta che dirige il dottorando o la dottoranda. Nella mia ricerca, nell'ambito astratto della teoria delle categorie, spesso gran parte del lavoro è capire esattamente qual è la domanda a cui si cerca di rispondere. La matematica scolastica si concentra troppo sul *rispondere* alle domande, invece di porle. Ho provato a cercare su Internet "migliori domande infantili sulla matematica" e, purtroppo, ho trovato solo ottime domande da *porre* alle bambine e ai bambini. È come se tutte le risorse disponibili pensassero che loro devono rispondere e *noi* dobbiamo interrogare. Bisogna procedere nella maniera esattamente opposta.

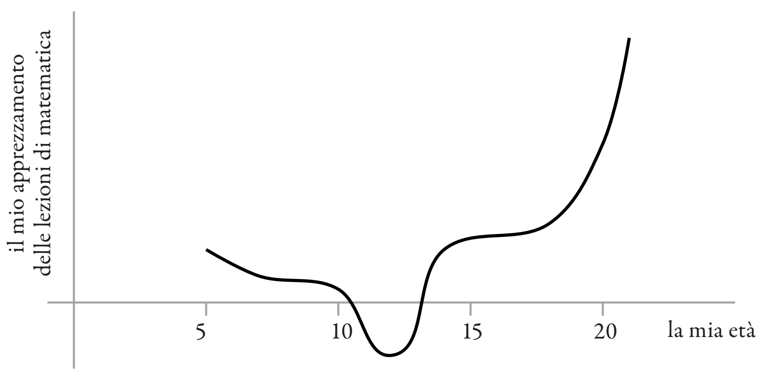
Vorrei incoraggiare le domande e sottolineare quanto sono preziose, che si tratti di quelle che avete sempre voluto porre ma che non hanno mai avuto risposta, di quelle che sono state definite fuori luogo, o di quelle che per tutta risposta hanno ottenuto un incitamento a finire i compiti. O, ancora, di quelle che vi hanno dato l'impressione di non avere il "bernoccolo della matematica", perché chi aveva voti alti nei compiti in classe non sembrava preoccuparsene. O, ancora, di quelle che vi hanno intralciato, perché non vi soddisfaceva limitarvi a scrivere la risposta prevista. Il libro che avete in mano riguarda tutte queste domande, che sono fondamentali per le forme più profonde di matematica. Non sto parlando della matematica in cui si sommano e moltiplicano numeri per ottenere la soluzione, o in cui si calcolano gli angoli dei triangoli o le aree di una figura purchessia, o si risolvono equazioni prive di significato con l'unico scopo di ottenere un buon voto. Penso invece al tipo di matematica di cui si occupa chi fa ricerca di punta nelle forme più astratte della disciplina, al tipo di matematica che si capisce dopo tanti decenni, o addirittura secoli o millenni, e anche allora la si capisce solo in parte. È il tipo di matematica che non sembra avere applicazioni immediate nella quotidianità, che non risolve subito nessun problema della vita né permette di costruire nuovi macchinari; è il tipo di matematica che esiste soprattutto nella testa degli esseri umani.

È reale questo tipo di matematica?

Erano reali i peluche che costruivo a scuola? Be', non erano animali veri, ma erano peluche veri.

La matematica non è esattamente "la vita vera", ma è comunque reale. Sono idee vere e pensieri veri, che producono comprensione vera e propria. Mi piace la chiarezza che ne deriva, e mi rattrista che sembri a volte trasformare tutto in un rigido bianco o nero, invece di gettare luce sull'ambiguità. Ma capisco che si possa avere questa impressione, dovuta alla maniera troppo spesso utilizzata per presentare la matematica. È successo anche a me, ai tempi della scuola.

Ecco un grafico del mio apprezzamento della matematica nel tempo o, meglio, del mio apprezzamento delle *lezioni* di matematica nel tempo.



Mi piaceva la matematica, in base all'idea che me ne facevo a cinque anni. Ma durante la scuola primaria il mio apprezzamento scese di continuo, e all'inizio della scuola secondaria arrivai al punto di detestare le ore di matematica, che mi sembravano pedanti e noiose. Non critico affatto il corpo insegnante, ma i programmi scolastici e il sistema di esami. La situazione migliorò quando iniziai a occuparmi di matematica leggermente più avanzata, soprattutto in alcune parti "di indagine" del GCSE (serie di esami qualificativi sostenuti nel Regno Unito tra i quattordici e sedici anni); erano le sole che mi piacessero. Quei progetti aperti, che duravano alcune settimane, iniziavano con una domanda ben strutturata, che poi lasciava spazio a infinite possibilità per ricerche indipendenti. Tempo dopo, frequentando i corsi avanzati di matematica per la maturità, mi appassionai infine ad alcuni ambiti della matematica pura: soprattutto l'algebra astratta, le dimostrazioni per induzione e le coordinate polari (ne riparlerò più avanti). Solo all'università ci fu il vero decollo, e quando iniziai il dottorato il mio apprezzamento della matematica si impennò di nuovo, fino a uscire dal grafico, ma è anche vero che a quel punto avevo smesso di seguire lezioni; imparavo leggendo testi, parlando con altri studenti e studentesse e assistendo a conferenze.

In realtà, però, il mio apprezzamento della *matematica* nel tempo è stato costante. Potrei rappresentarlo come una retta orizzontale, situata molto più in alto della curva che mostra quanto mi piacessero le lezioni di matematica. Ho avuto fortuna: mia madre mi mostrava la matematica nei suoi aspetti più divertenti, misteriosi, entusiasmanti e sbalorditivi, diversissimi da tutto ciò che si faceva a scuola; mi convinsi che la matematica non si limitasse affatto a quanto includeva il programma scolastico, e che potesse essere divertente, misteriosa, entusiasmante e sbalorditiva. La matematica di questo tipo mi ha sempre appassionata. So che è raro avere una madre che mostra cose simili e risponde a domande ingenue, così per molte persone l'apprezzamento della matematica potrebbe crollare a zero come è successo a me, senza però risalire in seguito. Spero che potremo cambiare questa situazione.

Vorrei aiutare chi ha la fobia della matematica a superare la propria paura (e forse il proprio trauma), e a capire perché chi fa ricerca ama la matematica, in maniera diversissima dal semplice "amore per i numeri" o dal divertimento nell'ottenere la soluzione giusta. Vorrei mostrare che se la matematica repelle certe persone, i deplorevoli motivi sono estranei alla sua vera natura. Vorrei spiegare che le domande ingenue, aperte, dall'aria "stupida" sono buone e valide, ed essenziali per la matematica. Vorrei convincervi che se credete di non avere talento per la matematica, o se così vi hanno detto a scuola, forse è perché aspiravate a una comprensione più profonda, che non vi hanno aiutato a raggiungere. E vorrei dare un'idea di che cosa significhi fare ricerca in matematica, esplorare questo mondo e scoprire verità sempre più profonde, man mano che ci si addentra nel suo sottobosco misterioso.

Inizierò ogni capitolo con una di quelle domande ingenue a volte ritenute "stupide"; mostrerò tuttavia che, approfondendole, si arriva a matematica importante e spesso a interi campi di ricerca. È un'analisi lenta e graduale; si sollevano i rami del sottobosco per vedere che cosa nascondono, e a volte può sembrare che si indietreggi di molto per chiarire la situazione. Può anche sembrare che si avanzi a passi minuscoli senza arrivare da nessuna parte, finché, all'improvviso, guardandoci alle spalle, scopriremo di aver raggiunto la cima di una montagna imponente. Tutto ciò può essere sconcertante, ma accettare un po' di disagio intellettuale (o, magari, parecchio disagio) è fondamentale per fare progressi in matematica. Il disagio è spesso un punto di partenza per la crescita e gli sviluppi ulteriori. A volte sembra che giri la testa quando notiamo un abisso tra ciò che dice l'intuito e ciò che fa pensare la logica accurata, o forse un abisso tra due impressioni intuitive diverse, come quando ho visto persone amiche per la prima volta dopo due anni di isolamento pandemico e ho avuto al contempo l'impressione che non fosse passato neanche un attimo o fosse trascorsa più di una vita intera.

Inizierò con idee generali sulla matematica, quindi entrerò in dettaglio: dapprima in ambiti circoscritti, poi in vicende specifiche. I primi quattro capitoli riguarderanno perciò l'idea generale della matematica: da dove viene (capitolo 1), come funziona (capitolo 2), perché ce ne occupiamo (capitolo 3) e che cosa la renda "buona" (capitolo 4). Tratterò poi aspetti specifici della matematica: l'uso delle lettere (capitolo 5), delle formule (capitolo 6) e delle figure (capitolo 7).

Chiuderò nel capitolo 8 con alcune storie particolari, iniziando da domande ingenue, e mostrerò che chi si occupa professionalmente di matematica collega le domande alle conoscenze esistenti; così facendo, trova spesso le risposte in aspetti profondi della matematica di punta.

Cercherò di descrivere che cosa si prova a seguire l'intuito lungo pensieri matematici aggrovigliati, invece di doverli ripercorrere a passo di marcia e in un intervallo di tempo prefissato. C'è la stessa differenza che passa tra l'attraversare una foresta perché bisogna arrivare dall'altra parte e l'imparare a farlo acquisendo le capacità necessarie, apprezzando al contempo le creature e il sottobosco che si incontrano lungo il percorso. La prima attività è utile in certi casi, ma l'altra è molta più feconda. Richiede più tempo e sforzi, ma è capace di fornire maggiori soddisfazioni. Per quanto mi riguarda, preferisco senz'altro esplorare il paesaggio di testa mia; la trovo un'attività più piacevole e una fonte di arricchimento molto maggiore. Come spiegherò, inoltre, essa mi torna addirittura utile nella vita quotidiana, in senso molto ampio, non limitato ad attività specifiche come dividere il conto al ristorante o fare i calcoli per la dichiarazione dei redditi: mi aiuta a ragionare con più chiarezza su qualunque cosa, letteralmente.

Forse c'è un contrasto tra gli utilizzi della matematica specifici e ben definiti, facili da descrivere, e un'applicabilità più vasta e generale, più ardua da precisare. Ma questa difficoltà non dovrebbe portarci a liquidare il tema; al contrario, le cose ardue da definire sono forse le più interessanti. Non si tratta di fatti matematici facili da memorizzare e da ripetere a pappagallo, ma di verità profonde.

Questo libro perciò riguarda le verità profonde della matematica e, cosa ancora più essenziale, riguarda la maniera in cui le si ottiene. In sé, le verità profonde sono importanti, ma vorrei soprattutto mostrare come ci si arriva. La situazione ricorda molto il vecchio adagio sull'insegnare a pescare invece di regalare un pesce alla persona affamata: se vi comunicassi alcune verità matematiche profonde, non vi avrei fornito che quelle verità stesse. Ma se vi mostro come ricavarle, tutte le verità matematiche diventano accessibili. A un certo livello, questo libro riguarda domande e risposte specifiche, ma a un livello più profondo e importante mostra che le domande ci conducono in un vero e proprio viaggio, per di più descrive la destinazione e che cosa ci invoglierà forse a partire, oltre alle vedute lungo strada.

Potrebbe sembrare che la matematica riguardi l'ottenimento delle soluzioni giuste, ma in realtà equivale al processo di scoperta e di esplorazione, al viaggio per arrivare alle verità matematiche e alla maniera di capire quando si è raggiunta la destinazione. Il viaggio inizia con la curiosità, che si manifesta sotto forma di domande.

1
Da dove viene la matematica

Perché 1 + 1 = 2?

Una risposta possibile è: "Perché sì!", ma questa è solo una variazione di: "Perché lo dico io!". Sono generazioni che l'infanzia è frustrata da questa risposta. "Perché lo dico io" significa che una certa autorità crea le regole, a suo piacimento, senza doverle giustificare, e chiunque altro deve obbedire e basta, in maniera servile.

È comprensibile che questa idea crei frustrazione. Anzi: in matematica c'è il forte istinto di violare subito tutte le regole, o di trovare situazioni dispettose in cui le regole non sono valide, per mostrare che dopotutto quella figura non ha tutta l'autorità che crede.

La matematica può sembrare un mondo di regole che bisogna seguire e basta; assume così un'aria rigida e noiosa. Al contrario, mi piace la matematica anche perché mi diverto a violare le regole o, almeno, a metterne alla prova i limiti. Mi imbarazza un po' dirlo, perché sembro un'adolescente che non è mai cresciuta. Mi piace la matematica anche per un altro motivo: mi diverto a chiedere sempre "perché?" su tutto; così sembra invece che io non abbia mai superato i due anni. Ma entrambi questi istinti svolgono un ruolo importante nel far progredire le conoscenze umane, in particolare nell'ambito matematico. Questi istinti sono fondamentali nelle origini della matematica, di cui parleremo in questo capitolo.

Vorrei sottolineare che nella vita normale sono rispettosissima delle leggi, perché capisco che alcune regole sono necessarie per tenere insieme la comunità e garantire la sicurezza personale. Credo in queste regole. Non ho nulla in contrario a seguire quelle che servono a qualcosa; mi oppongo alle regole arbitrarie che sembrano ingiustificate, o la cui giustificazione non mi convince. Alcuni esempi sono “bisogna rifare il letto ogni giorno” (cosa che non mi piace per niente) o “mai sciogliere il cioccolato nel microonde” (certo, è facilissimo rovinarlo, ma secondo me non c’è problema se si fa attenzione a mescolarlo ogni 15 secondi).

Vorrei quindi esaminare l’origine delle “regole” apparenti della matematica o, anzi, l’origine della matematica stessa. Spiegherò che nasce da piccoli semi e poi raggiunge grandi altezze in maniera organica. I semi sono domande ingenue che potrebbero venire in mente a chiunque, e che i bambini e le bambine piccole spesso pongono con semplicità, per esempio quando si chiedono perché 1 + 1 faccia 2, invece di accettare che le cose stanno così. Come ogni seme, per crescere quelle domande vanno curate nella maniera giusta. Hanno bisogno di terreno fertile, spazio per le radici e nutrimento. Purtroppo le domande ingenue sono raramente curate in questo modo; vengono invece liquidate come “stupide” e messe da parte. Ma la differenza tra domande matematiche profonde e domande ingenue potrebbe essere solo la cura che ricevono; in altri termini, non c’è differenza. I semi sono gli stessi.

Spesso le persone che non apprezzano la matematica sono scoraggiate da dichiarazioni dall’aria autocratica, secondo cui una certa risposta è quella giusta, senza nessuna spiegazione. “Uno più uno fa due, e basta”. Ma chiedersi perché qualcosa sia vero porta a gettare la matematica su fondamenti solidi, permettendo di ragionare in maniera chiara e rigorosa. A volte la chiarezza e l’affidabilità vengono considerate rilassanti e liberatorie; altre volte, restrittive e autocratiche. Ma una domanda come: “Perché 1 + 1 = 2?” permette di esaminare l’idea che la matematica non ha risposte giuste e nette, ma contempla ambiti variegati in cui possono essere vere cose diverse. Arriveremo così a indagare l’origine dei numeri, come si arriva alle idee dell’aritmetica e come usarle in svariati ambiti matematici, per esempio quando si riflette sulle forme. Entreranno in gioco molti aspetti importanti dello sviluppo della matematica: fare collegamenti, prendere sul serio l’astrazione e generalizzare le riflessioni per inglobare una porzione sempre maggiore del mondo circostante, poco alla volta.

Così, invece di pensare perché uno più uno faccia due, andiamo un po' oltre e chiediamoci se in fondo ciò sia sempre vero.

Violare i confini

Le bambine e i bambini sembrano avere una dote naturale per trovare controesempi, cioè casi che smentiscono la regola. Dichiarando che qualcosa è sempre vero, in un certo senso vi si traccia un confine attorno; cercando esempi che contraddicono questo fatto, si cercano di violare quei confini imposti dall'alto. Questo è un importante istinto matematico.

Provate a sottoporre a un bambino o una bambina la faccenda dell'uno più uno, chiedendo per esempio: "Se ti do un pasticcino e poi un altro pasticcino, quanti pasticcini avrai?". Vi sentirete forse rispondere allegramente: "Nessuno, perché me li sono mangiati!", o anche: "Nessuno, perché non mi piacciono i pasticcini". Mi diverto sempre a leggere le risposte infantili sbarazzine postate su Internet dai genitori. Una delle mie preferite in assoluto aveva fatto seguito alla domanda: "Joe ha sette mele e ne usa cinque per fare una torta di mele. Quante gliene rimangono?"; la risposta infantile, proveniente da una famiglia che conosco, era: "Ha già mangiato la torta?". Mi piacciono le risposte che sono in un certo senso giuste, benché diverse da quelle che verrebbero ritenute corrette. Si tratta di un lato importante della matematica, e i percorsi mentali infantili mostrano un aspetto essenziale ma poco valorizzato dell'istinto matematico: la ribellione spontanea contro l'autorità ingiustificata.

I bambini e le bambine cercano forse di stuzzicare l'autorità perché esplorano i confini delle situazioni, o perché cercano una propria identità in un mondo che concede loro libertà di decidere in pochissimi casi. Ricordo benissimo che, nell'infanzia, trovavo molto frustrante dover fare sempre ciò che mi dicevano gli adulti. Se mi accorgevo che la domanda di una persona adulta aveva una risposta prestabilita, mi divertivo a partire in un'altra direzione, per esempio sostenendo che non mi piacevano i pasticcini.

In un certo senso è un istinto sfacciato e distruttivo ma, secondo me, anche matematico. Sì, la matematica è forse sfacciata e distruttiva ma, in altri termini, si può dire che la matematica va alla ricerca dei confini, come si fa nell'infanzia. Ci interessa capire bene i limiti entro i quali certe cose sono vere: essi ci danno la certezza di trovarci nella zona "sicura" e, al contempo, la possibilità di esplorare quella esterna, se ci spinge l'audacia o la curiosità. È come quando un bambino o una bambina di due anni scappa lontano, per vedere se una persona adulta arriverà di corsa. Considerare le situazioni in cui uno più uno non fa due ne è un esempio.

Se dico "Non sono non stanca", ciò significa che sono stanca, e alcuni bambini o bambine si divertono molto a dire "Non sono non non non non non non non non non stanco", per poi scoppiare in lacrime, dato che senz'altro chi li ascolta ha perso il conto di tutti quei "non". La cosa da notare è che un "non" più un altro "non" equivale a zero "non". Mi ricorda una tremenda prova d'esame che una volta ho dovuto correggere: includeva un calcolo lungo e noioso, dove in molti punti si poteva sbagliare un segno negativo. La correzione era davvero faticosa, perché due errori del genere, o anche quattro, avrebbero condotto al segno giusto per il risultato finale. Ma in matematica la soluzione non è considerata giusta se non lo è il procedimento seguito (ne riparlerò nel prossimo capitolo), così ho dovuto controllarlo bene ogni volta, anche se il risultato era "giusto".

Uno più uno fa zero anche nei casi in cui tutto è già zero, come il mondo dei dolciumi in cui vivevo da bambina: ero allergica ai coloranti alimentari artificiali, che all'epoca si trovavano ovunque, così per quanti dolci avessi, di fatto ne avevo sempre zero.

A volte il risultato di uno più uno è maggiore di due a causa degli errori di arrotondamento. Se accettiamo solo numeri interi, 1,4 conta come 1 (si arrotonda all'intero più vicino). Ma sommando 1,4 e 1,4 si ottiene 2,8, che viene arrotondato a 3 (di nuovo, è l'intero più vicino). Nel mondo degli arrotondamenti, quindi, sembrerà che uno più uno faccia tre. C'è una situazione leggermente diversa ma legata a questa: se i soldi vi bastano per pagare un caffè, e vale altrettanto per una persona di vostra conoscenza, mettendo i risparmi in comune riuscirete forse a pagare tre caffè, ma separatamente solo due, perché 1,5 o addirittura 1,9 volte i soldi necessari per un caffè permettono comunque di pagarne solo uno.

A volte uno più uno dà un risultato maggiore di uno per via della riproduzione: se mettete insieme un coniglio femmina e uno maschio, potreste ritrovarvi con parecchi conigli. Altre volte il motivo è che gli elementi da addizionare sono piuttosto complicati: se una coppia di persone che giocano a tennis si incontra con un'altra coppia per una serie di partite, le coppie alla fine saranno più di due, perché ci sono varie combinazioni possibili. Se A e B sono le persone della prima coppia, e C e D compongono la seconda, tutte le coppie possibili sono: AB, AC, AD, BC, BD e CD. Quindi sommando una coppia di persone che giocano a tennis a un'altra coppia si creano sei coppie.

A volte invece uno più uno fa solo uno: mettendo un mucchio di sabbia su un altro mucchio si rimane sempre con un mucchio di sabbia. O, come mi ha fatto notare una persona della mia classe che studiava arte, mescolando un colore con un altro colore si ottiene un colore solo. O ancora, come ho visto in un meme divertente: mettendo una lasagna sopra un'altra lasagna si ottiene comunque una lasagna sola (più alta).

C'è un'altra situazione in cui uno più uno fa uno: quando si ha un buono per avere una ciambella insieme al caffè, ma se ne può usare al massimo uno a testa, quindi anche averne due è come averne uno solo (a meno di poterlo regalare). E ancora: se premete il pulsante "apertura porta" del treno, non c'è differenza tra premerlo ripetutamente o una volta sola. Almeno, l'effetto sulla porta non cambia, ma forse c'è qualche differenza in termini della frustrazione che si può esprimere; è magari per questo che certa gente insiste a premerlo tante volte.

Penserete forse che nei casi descritti il risultato di uno più uno non sia poi così insolito, perché non si tratta di addizioni vere e proprie, o gli oggetti in questione non sono davvero numeri, o comunque bisogna escluderli per altri motivi. Avete tutto il diritto di pensarlo, ma la matematica non funziona così.

La matematica dice piuttosto: studiamo quei contesti e il loro significato. Proviamo a individuarne le conseguenze e cerchiamo altri contesti che funzionano in maniera analoga. Chiariamo il contesto in cui uno più uno fa davvero due e quelli in cui risultato è diverso; così facendo capiremo il mondo in maniera più approfondita di prima.

Da qui nasce la matematica. E per studiare i contesti in cui uno più uno fa due oppure no, non voglio limitarmi a esaminare da dove viene questa equazione: vorrei risalire fino all'origine di qualsiasi indagine matematica.

L'origine della matematica

La matematica nasce dal desiderio di capire bene le cose. Bisogna trovare un modo di ragionare che faciliti il compito. Per rendere le cose più facili da capire se ne possono ignorare gli aspetti difficili, ma è meglio trovare un punto di vista che permetta di concentrarsi sulla parte rilevante al momento, senza dimenticare del tutto le altre.

È un po' come montare su un obiettivo fotografico un filtro con cui mettere a fuoco temporaneamente alcuni colori, per poi sostituirlo con un filtro diverso che ne mette a fuoco altri. Oppure penso alla fase della preparazione di uno stufato in cui si filtra il liquido per restringerlo e addensarlo: non si butta il materiale trattenuto dal colino, in seguito lo si aggiunge di nuovo.

Il punto di partenza più noto per la matematica sono i numeri. Spesso è la prima introduzione alla matematica per molte bambine e bambini, ed è la prima impressione di che cosa sia questa disciplina; in vari casi è un'impressione duratura. Ma la matematica è molto più che i numeri. E anche quando sembra riguardare quelli, in realtà si occupa piuttosto di come passare dal nostro mondo a quello dei numeri, e delle cose scoperte così facendo.

La forte associazione tra la matematica e i numeri ha il problema che questi possono sembrare noiosi a chiunque apprezzi l'ambiguità, la creatività, l'esplorazione spregiudicata e l'immaginazione. Non cercherò di convincervi che i numeri siano interessanti, al contrario: sono noiosi, e questo è proprio il loro scopo.

I numeri servono a cogliere alcuni aspetti del mondo circostante permettendoci di andare oltre il prima possibile, dando modo alla parte più interessante del cervello di occuparsi delle parti più entusiasmanti del mondo. È come affidare a un computer tutte le incombenze quotidiane più noiose (che per me includono pagare le bollette, fare la spesa, ricalcolare una ricetta per un numero di persone diverso da quello previsto), risparmiando le energie cerebrali per le parti più interessanti: interagire con la gente, suonare il pianoforte, preparare manicaretti.

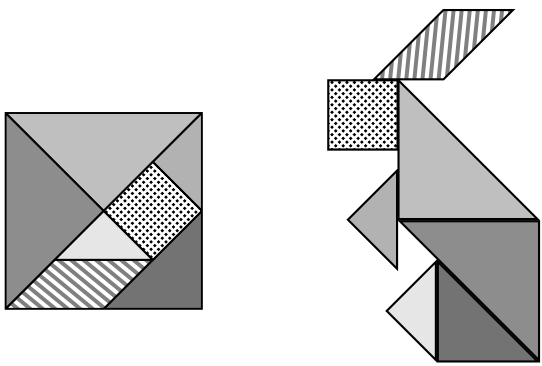
I numeri vengono dal desiderio di semplificare il mondo circostante. Non c'è da stupirsi che il risultato sia semplice e, quindi, potenzialmente noioso. In origine, però, l'invenzione dei numeri è abbastanza profonda. Essi scaturiscono da un'analogia fra situazioni diverse, in cui si è scelto di ignorare alcune parti per qualche tempo. Se consideriamo due mele e due banane, possiamo notare una certa somiglianza tra i due gruppi, poi riassumerla nel cervello tramite il concetto di "due". Ma per riuscirci dobbiamo ignorare la "melità" delle mele e la "bananità" delle banane, vedendole solo come oggetti astratti, senza proprietà specifiche.

Questa è un'astrazione. È un balzo difficile, e non c'è da stupirsi se fino a una certa età risulta arduo. Possiamo incoraggiare i bambini e le bambine che ci provano, contando più volte le cose che hanno davanti, ma alla fine sono loro a dover compiere il balzo; non possiamo occuparcene noi.

Il problema è che può sembrare riduttivo trascurare quelle caratteristiche cruciali degli oggetti in questione e, se ci focalizziamo solo sul passaggio in cui "rendiamo le cose più noiose", tutto sembra diventare noioso; bisogna invece concentrarsi sull'obiettivo finale, che era schiudere nuove e fantastiche possibilità di comprensione.

Lo scopo dell'astrazione

Inventando i numeri abbiamo compiuto un passo abbastanza profondo: un'astrazione. Essa consiste nel trascurare alcuni dettagli di un contesto dato per esaminarne una versione "idealizzata", diversa da quella concreta (situata nel mondo reale) ma sufficiente a cogliere le proprietà da analizzare al momento. L'astrazione ci allontana dal caso reale, ma con uno scopo ben preciso: trovare analogie fra contesti diversi in modo da studiarli una volta sola, risparmiando molta fatica. In un certo senso stiamo semplificando i mattoncini elementari, per poter costruire in maniera più creativa. È un po' come la differenza tra un puzzle che va composto in una maniera ben determinata per ottenere l'immagine prevista (e i pezzi si incastreranno in un modo solo) e un puzzle con pezzi più generici, che hanno varie possibilità di incastrarsi; lo scopo allora non è ottenere un'immagine data, ma scoprire quante strutture diverse si possono realizzare. Mi è sempre piaciuto il tangram per questo motivo: i pezzi non sono che figure geometriche generiche (un quadrato, triangoli di varie dimensioni e un parallelogramma). Si ritiene che il tangram abbia avuto origine nella Cina settecentesca, benché costruzioni analoghe siano citate nella matematica cinese molto più antica. I pezzi possono combinarsi in un quadrato come nella figura qui sotto, ma anche dar luogo a una serie infinita di altre forme, che rappresentano persone, animali o qualunque cosa vogliate immaginare, benché in maniera un po' stilizzata. Ecco un coniglio:



Anche i numeri schiudono possibilità infinite, ma senza altrettanta efficacia visiva. (Nel capitolo 7 riparleremo dell'uso delle figure in matematica). E, a parte il fatto che sono meno visivamente attraenti, i numeri possono sembrare piuttosto freddi se poi li si utilizza soltanto per risolvere problemi specifici con soluzioni altrettanto specifiche, per sentirsi dire alla fine che il risultato è giusto o no, e basta.

Decisamente la matematica non si riduce ai numeri, che però sono il punto di partenza per imparare a svolgere ragionamenti con l'astrazione. I passi essenziali di questo procedimento si possono schematizzare come segue.

Prima di tutto scegliamo gli aspetti più interessanti della situazione. Magari abbiamo notato somiglianze tra situazioni diverse e ci incuriosisce scoprirne la causa. Procediamo quindi per astrazione: ci concentriamo sulle parti di una situazione che somigliano a parti di altre e, se ci interessano le quantità, utilizziamo qualcosa di simile ai numeri, che sono "il nocciolo" di quanto studiato al momento. Si crea allora un nuovo mondo astratto che possiamo esplorare, per capirne il funzionamento, scoprire le creature che ci vivono e i paesaggi strani e meravigliosi che si nascondono dietro l'angolo.

Se questo mondo ci sta stretto, possiamo crearne uno nuovo ed esplorarlo; spesso si procede così. Potremmo invece occuparci di capire meglio il legame con il mondo attorno a noi. È anche possibile creare un legame diverso tra il mondo circostante e quello astratto; per esempio si possono misurare le quantità in varie maniere, realizzare conteggi in altri modi o associare diversamente i numeri alle cose, come nella valutazione dei ristoranti, che può adoperare svariati criteri. Possiamo inoltre concentrarci su un aspetto diverso del mondo circostante, come la forma invece della quantità.

È un po' come se ci regalassero una nuova scatola di colori e li mescolassimo per vedere che cosa succede. Ma i colori matematici hanno una proprietà meravigliosa: i tubetti non finiscono mai. Non si rischia di "sprecare" colori con mescolanze infelici, perché si tratta solo di idee, che non si esauriscono facendo esperimenti. Giocando con i numeri non li si consuma, e vale altrettanto per ogni concetto astratto. Per me è uno degli aspetti più divertenti e apprezzabili della matematica. Ma fa anche insorgere una notevole perplessità: è reale, tutto ciò?

Sono reali i concetti astratti?

La prima cosa che mi fa venire in mente questa domanda è: ma che cosa significa "reale"? C'è forse qualcosa di reale? Se ci penso abbastanza a lungo, finisco per convincermi che io non sono reale e che nulla lo è.

Se vi siete mai chiesti se la matematica è reale, vi avranno forse detto che è una domanda stupida. Forse attorno a voi c'erano persone “brave in matematica” che non se lo chiedevano, preoccupandosi soltanto di ottenere le soluzioni giuste.

Be’, vorrei rassicurarvi: a livello professionale, in matematica e soprattutto in filosofia, ci si interroga eccome sullo status della matematica. I numeri esistono? Non essendo filosofa, non approfondirò il lato filosofico della cosa; mi limiterò a dire che cosa ne penso.

Per esaminare se qualcosa è “reale”, potrebbe essere utile citare alcune cose che riteniamo tali oppure no. Probabilmente non verrà da contestare la realtà di molte cose concrete e tangibili: il mondo è reale, lo è la gente e anche il cibo. Poi vengono cose che consideriamo reali benché non si possano toccare, come la fame, l’amore o la povertà. Saremo magari d’accordo che non sono reali il coniglietto pasquale, la fatina dei denti e Babbo Natale. Non saremmo invece sempre d’accordo sulla realtà di altre cose, come Dio, gli UFO, i fantasmi e, purtroppo, il Covid.

Ma aspettate un attimo: secondo me, in realtà, Babbo Natale e la fatina dei denti *sono* reali. Penserete forse che sia impazzita, ma ora cercherò di spiegarmi.

In date culture, i bambini e le bambine piccole credono (o si sentono dire dalle persone adulte) che Babbo Natale è un uomo dalla folta barba bianca, vestito di rosso, che vola attorno al mondo in una slitta trainata da renne per distribuire i regali. Crescendo, bambine e bambini avranno la delusione di scoprire che i loro regali (se festeggiano il Natale) vengono in realtà dai genitori, che semplicemente li mettono sotto l’albero durante la notte. Si pensa che ciò equivalga a rendersi conto che Babbo Natale “non esiste”.

A mio parere, invece, il significato è un altro: bisogna solo concludere che la descrizione tradizionale di Babbo Natale, assai poco realistica, non è letteralmente vera. C’è però qualcosa che esiste: qualcosa grazie a cui, in tutto il mondo, la mattina di Natale bambine e bambini ricevono i regali. Il qualcosa è un concetto astratto: un’idea di Babbo Natale. Obietterete forse che questa idea esiste, ma comunque Babbo Natale no. I concetti matematici, però, sono tanto astratti che non sono altro che idee. L’idea del numero due *è* il numero due. E si tratta di idee vere! Io sono del tutto abituata a trattare idee matematiche astratte come oggetti reali, quindi non ho problemi a considerare anche Babbo Natale come un vero concetto astratto. Prendere le idee sul serio e trattarle come oggetti reali è importante nello sviluppo della matematica.

Lo sviluppo della matematica

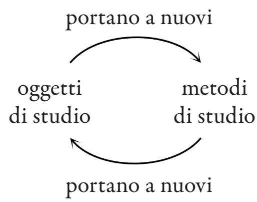
Potrebbe sembrare che la matematica riguardi solo numeri ed equazioni, ma anche ripensando ai primi anni di matematica scolastica ricorderete forse che apparivano altre cose, magari figure e motivi geometrici, e rappresentazioni visive come grafici a barre o diagrammi di Venn. Il mio ambito di ricerca (in una branca molto astratta della matematica detta teoria delle categorie) non coinvolge affatto numeri ed equazioni. Ma allora, se la matematica non si limita a studiare numeri ed equazioni, che cos'è? Spesso la descrivo come "lo studio di come funzionano le cose", tranne che non è lo studio di cose qualunque e neanche uno studio qualunque. A mio parere:

> La matematica è lo studio logico di come funzionano le cose logiche.

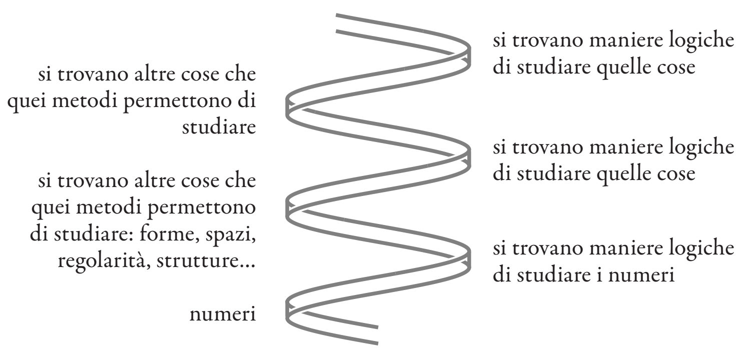
Il primo problema è che, in realtà, nulla è davvero logico: nella vita tutto funziona secondo un miscuglio di logica e altri fattori, come la casualità, il caos e le emozioni. Si potrebbe forse dire che anche queste cose sono logiche, ma troppo complesse per capirle tramite la logica. Per esempio, il tempo atmosferico in realtà è logico, ma non riusciremo mai a ottenere misure dei parametri atmosferici abbastanza precise da realizzare previsioni sufficientemente affidabili usando la logica. Il tempo atmosferico non è illogico: è solo difficile da prevedere.

In genere la matematica affronta questo tipo di ostacoli con il procedimento già descritto: l'astrazione. Dimentichiamo alcuni dettagli del problema in esame per allontanarci dal mondo "reale", troppo confuso, per arrivare nel mondo astratto delle idee, dove le cose obbediscono alla logica, dato che comodamente abbiamo ignorato (per qualche tempo) quelle che non lo fanno. Non intendo però chiamare "reale" il mondo non astratto, perché non penso che le idee astratte non siano reali. Preferisco quindi chiamare "concreto" il mondo non astratto, quello tangibile.

Un aspetto affascinante della matematica è che non si definisce soltanto in base a ciò che studia. Moltissime discipline, come la storia, la biologia, la psicologia e l'economia, sono definite dall'ambito di cui si occupano; dopodiché si elaborano tecniche per far progredire lo studio di quell'ambito. Ma il caso della matematica è ciclico: la *cosa* da studiare è definita da *come* viene studiata, e a quel punto, oltre a scoprire nuove cose da studiare, si trovano anche nuove maniere di studiarle. La situazione ricorda questo grafico:



In realtà, tuttavia, ogni freccia consente di ottenere qualcosa di nuovo, quindi non ripercorriamo sempre lo stesso cerchio: la traiettoria somiglia piuttosto a una spirale, perché gira in tondo ma al contempo si innalza. Troviamo sempre nuove cose da studiare con i nuovi metodi, e nuovi metodi per studiarle; il meccanismo si riproduce continuamente. Di fatto saliamo questa "scala" a chiocciola che parte dai numeri, in basso:



Abbiamo quindi una sorta di scala a chiocciola che sale all'infinito. Mostrerò come potrebbe funzionare il procedimento, salendo la