A cura di
Luciana Salvucci

Strumenti per la didattica della matematica

Ricerche, esperienze, buone pratiche

Prefazione di Bruno D'Amore

SCIENZE DELLA FORMAZIONE

FrancoAngeli

A cura di
Luciana Salvucci

Strumenti per la didattica della matematica

Ricerche, esperienze, buone pratiche

Prefazione di Bruno D'Amore

FrancoAngeli

Ristampa	Anno
1 2 3 4 5 6 7 8 9	2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024

Stampa: Geca Industrie Grafiche, Via Monferrato 54, 20098 San Giuliano Milanese.

Indice

Appendice. Condivisione di ricerche ed esperienze nel Progetto Comenius

Agli studenti delle nostre scuole:
il risultato di una ricerca
e la tenacia di un impegno
per una scuola che li aiuti a migliorare,
insieme al ragionare e all'agire scientifico,
la considerazione di se stessi e degli altri.

Prefazione

di Bruno D'Amore[1]

Questo libro prende le mosse da un convegno nazionale sulla didattica della matematica, destinato alla formazione degli insegnanti, che si svolse nella splendida e magica cornice dell'Abbazia di Santa Maria di Chiaravalle di Fiastra, Tolentino, provincia di Macerata, il 19 maggio 2009, organizzato dall'amica Luciana Salvucci, dirigente scolastico, ma soprattutto poetessa di notevole profondità.

Il convegno e i successivi Atti, in parte oggetto di questa pubblicazione, furono strumento di studio e ricerca, oltre che di un gruppo di insegnanti della provincia, anche di un progetto Comenius, come sarà descritto in modo dettagliato nel corso del testo.

Come in tutti i convegni che si rispettano, ognuno degli oratori fece il proprio intervento sulla base delle proprie inclinazioni e prerogative; io decisi, in quella occasione, di puntare sulla divulgazione della matematica, come apertura di carattere culturale; Martha Fandiño fece un breve intervento specifico di didattica della matematica.

Con il trascorrere del tempo, Luciana con pazienza e perseveranza curò il testo che raccoglie gli interventi del convegno, aggiungendone però altri suoi e di tanti altri Autori, sui temi più disparati che ruotano attorno ai processi di insegnamento – apprendimento della matematica, trasformandolo in un libro dai mille volti, che la vede come editor e che sale ora alla luce. E mi chiese di scrivere una prefazione abbastanza lunga e ricca di contenuti di carattere didattico, cosa che accettai di fare in vista di un uso strumentale del libro, nelle mani degli insegnanti che vorranno sfogliarlo.

Decisi dunque di riprendere i temi di base, classici, della didattica della matematica per darne una presentazione molto elementare.

[1] NDR - Dipartimento di Matematica Università di Bologna; Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotà, Colombia, Doctorado de Investigación.

La mia speranza è che queste riflessioni iniziali servano allo scopo che io auspico, quello di avviare il lettore insegnante verso uno studio più approfondito di queste importanti questioni.

0. Scopo del testo

L'attuale ricerca in didattica disciplinare sembra tutta tesa ad accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento, ma da un punto di vista fondazionale e comunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento (anche se la psicologia cognitiva in questo momento sembra la più autorevole candidata al ruolo di organizzatrice fondazionale per molte esperienze di ricerca).

Affrontando la didattica disciplinare come epistemologia dell'apprendimento, farò esempi nel campo che mi compete, cioè in quello della matematica. Discussioni con colleghi, didatti di altre discipline e letture occasionali, però, mi danno conferma del fatto che le problematiche generali sembrano essere le stesse, anche nelle diverse specificità. Per cui, pur non volendo (potendo) uscire dallo stretto ambito detto, sono convinto che non troppo diversi sarebbero i possibili analoghi resoconti critici di appartenenti ad altri settori di ricerca.

Quel che farò qui è presto dichiarato. Analizzerò alcune tra le problematiche che sembrano emergere con più forza negli ultimi anni, che si sono consolidate come elementi di ricerca in didattica della matematica, e che mi sembrano fornire appigli solidi e significativi per una possibile generalizzazione. Mi asterrò da presentazioni troppo tecniche e mi limiterò dunque solo alla posizione di ogni singolo problema proposto, passando in rassegna, nei prossimi paragrafi, alcune tematiche molto diffuse nell'ambiente di ricerca e che sembrano essere di particolare interesse per gli insegnanti.

1. Il contratto didattico

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica l'idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau (1986), che si rilevò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita dalle sue ricerche dei primi anni '80. Furono poi gli studi della seconda metà degli anni '80 a decretarne il trionfo e la teorizzazione piena; ad essi parteciparono vari studiosi di tutto il mondo: l'idea veniva riconosciuta ed entrava a far parte del linguaggio condiviso dall'intera comunità internazionale.

Questa idea, di spirito tutto francese,[2] non era del tutto nuova. Nel 1973, Jeanine Filloux introdusse il termine di *contratto pedagogico* per definire alcuni tipi di rapporto tra docente ed allievo. Quello della Filloux era un contratto generale, più sociale che cognitivo, mentre il contratto didattico di Brousseau tiene conto anche delle conoscenze in gioco. Il primo tentativo di "definizione" del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico» (Brousseau, 1986).

Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.

Qualche esempio.

Es. 1 (concezione della scuola): L'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa; quindi anche se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere *liberamente* quel che pensa (per esempio sulle altezze di un triangolo), l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile rigoroso perché suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo; non scriverà affatto "liberamente" ma cercherà invece di dare la definizione che ritiene essere quella 'corretta', cioè quella che ritiene essere attesa dall'insegnante.

Es. 2 (concezione della matematica): Lo studente ritiene che in matematica si *devono* fare dei calcoli; per cui, anche se la risposta alla domanda posta in un problema può essere data solo rispondendo a parole, lo studente è a disagio e tende a far uso dei dati numerici per dare comunque una risposta formale.

Es. 3 (ripetizione delle modalità): Per tre lunedì consecutivi l'insegnante di matematica fa svolgere esercizi alla lavagna; da quel punto in poi l'allievo sa che ogni lunedì sarà così; una modifica al programma atteso genera sorpresa. Lo stesso vale, per esempio, quanto all'attesa del programma possibile nel corso di un'interrogazione: se l'insegnante ha sempre e solo fatto domande sul programma svolto nelle ultime lezioni, non può, a detta dello

[2] Sto pensando a Jean-Jacques Rousseau ed al suo *Contrat social* (1762).

studente, fare domande su argomenti oggetto di lezione in un passato più remoto...

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *L'età del capitano*; io lo racconterò qui di seguito, così come l'ho vissuto (e fatto vivere) personalmente (D'Amore, 1993a). In una classe IV primaria (età degli allievi 9-10 anni), ho proposto il celeberrimo problema (nel quale il "capitano" diventa un "pastore"): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».
In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento della maestra, ho reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità) (D'Amore, Sandri 1993), dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un'altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti (una ed una sola volta), e possibilmente nell'ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun'altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L'unico imbarazzo stava semmai nella scelta della operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell'addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...

Con l'espressione *effetto «età del capitano»* si designa oggi il comportamento di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica.

Naturalmente, il "caso" non è esclusivo della scuola primaria ma, mutando quel che c'è da mutare, interessa ogni ordine di scuola.

Tale effetto rientra tra quelli cosiddetti di *rottura* del contratto didattico: se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche. Ma lo studente non ha la forza, non essendo mai stato abituato, a rompere il contratto e preferisce rispettarne le supposte clausole pur di non rischiare, pur di non osare in prima persona.

Studi approfonditi sul contratto didattico hanno permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare *stricto sensu* con la matematica, ma che dipendono dal contratto didattico instaurato in classe.

In D'Amore (1993b), racconto una curiosa esperienza basata sul testo seguente, dato in una scuola elementare a diverse classi:

«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:
- due di essi non possono pagare;
- da Bologna a Verona ci sono 120 km;
- un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto spenderà ciascuno?».

Inutile dire che si tratta di un problema complesso, che si voleva realmente effettuare la programmazione di una gita, che gli studenti avrebbero dovuto discutere del problema e cercare la risoluzione in gruppo eccetera.

Di fatto, la stragrande maggioranza degli studenti, di fronte alla risoluzione di questo problema, commette un errore ricorrente: non tiene conto del viaggio di ritorno e calcola dunque la spesa totale con l'espressione errata: $500 \times 120 + 20000$.

Su questo punto c'è una vasta bibliografia che tende a giustificare questo fatto. Una delle giustificazioni più ricorrenti è una sorta di… dimenticanza strategica o affettiva: l'andata di una gita è emotivamente un momento forte, il ritorno no.

Per cercare di capire meglio la questione, spezzai il problema in varie componenti o fasi, con tante "domandine" parziali specifiche; ma l'errore si ripeteva. Suggerii allora ad alcuni insegnanti di far mimare le scene dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Il caso incredibile che trovai e che descrissi in D'Amore (1993b) è quello di un bambino che ha disegnato il pullman sotto una doppia freccia:
in una c'è scritto «Bologna → Verona 120 km», nell'altra «Verona → Bologna 120 km», dunque c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata.

Una delle giustificazioni più presenti date dai bambini nelle interviste è che essi non si sentono autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Conta poco il senso della richiesta contenuta nei problemi di Matematica, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali. Uno dei bambini, intervistato, dichiara: «Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo»; è evidente la lacuna che il bambino avverte: in nessuno dei dati appare lecito raddoppiare la spesa per il percorso chilometrico.

Sempre legato al contratto didattico, risulta molto interessante leggere l'atteggiamento degli studenti di fronte al seguente celebre problema di Alan Schoenfled (1987a):

«Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?».

Dei 45000 allievi quindicenni studiati negli USA da Schoenfeld, solo meno di un quarto (il 23%) è riuscito a dare la risposta attesa: 32. Il ricercatore statunitense afferma quindi che pochissimi studenti sono in grado di rileggere il senso della domanda, osando di scrivere 32, di fatto non ottenuto formalmente nell'operazione, e propone come causa di questo comportamento questioni relative a fatti metacognitivi.

A distanza di parecchi anni, recentemente abbiamo voluto analizzare di nuovo la stessa situazione (D'Amore, Martini, 1997) ed abbiamo trovato alcune novità. La prova è stata fatta a vari livelli scolastici lasciando libertà agli studenti di usare o no la macchina calcolatrice. Abbiamo avuto molte risposte del tipo: 31,333333 soprattutto da parte di chi usava la macchina calcolatrice; altre risposte: $31,\overline{3}$ e 31,3.

Il controllo semantico, quando c'è, porta qualcuno a scrivere 31 (gli autobus «non si possono spezzare»), ma ben pochi si sentono *autorizzati* a scrivere 32. Tra chi usa la macchina calcolatrice, poi, si ha lo 0% di risposte "32".

e la traslazione T individuata dal vettore ‼ EMBED Equation.3 ¶ ⊥ ha se anche fa un controllo semantico sugli autobus come oggetti non divisibili in parti, ciò non lo autorizza a scrivere 32; c'è addirittura chi non si sente autorizzato neppure a scrivere 31; non si può parlare semplicemente di "errore" da parte dello studente, a meno che non si intenda per errore l'incapacità di controllare, una volta ottenuta la risposta, se essa è semanticamente coerente con la domanda posta; ma allora scatta un altro meccanismo: lo studente non è disposto ad ammettere di aver fatto un errore e preferisce parlare di "trucco", di "trabocchetto"; per lo studente un errore matematico o in matematica, è un errore di calcolo o assimilabile ad esso, non di tipo semantico.

Un lungo e sistematico studio su questa prova, eseguito anche attraverso numerose interviste agli studenti, rivela che "il colpevole" di questo comportamento è una clausola del contratto didattico, alla quale abbiamo dato il nome di “clausola di delega formale”. Lo studente legge il testo, decide l’operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che… disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l’impegno dello studente è finito ed ora tocca all’algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico.

Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissimi anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l’epistemologia dell’apprendimento matematico.

2. Conflitti e misconcezioni

Un altro argomento di studio in didattica della matematica che sta emergendo con estrema forza e grande rilievo riguarda i *conflitti cognitivi*. Si tratta di questo: lo studente può nel tempo aver assunto un concetto ed essersene fatto un’immagine; questa immagine può essere stata rinforzata nel tempo da prove, esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto ad un’altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall’insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente.

Si crea così *conflitto* tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva.

Legata alle idee di “immagine di un concetto” e “conflitto”, c’è un’importante questione che riguarda la *misconcezione*. Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.

Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute.